



関西学院大学リポジトリ

Kwansei Gakuin University Repository

特殊な環境での自発的パターンの実験観察とその数 理的解析

著者	宇野 彩加
発行年	2019
URL	http://hdl.handle.net/10236/00028900

特殊な環境での自発的パターンの実験観察とその数理的解析

関西学院大学大学院理工学研究科
数理科学専攻昌子研究室 宇野 彩加

1 はじめに

我々の住む自然界には様々なパターンが存在している。生物のパターン形成の有名な例として、バクテリアコロニーのパターン形成が挙げられる。バクテリアコロニーは、環境条件の変化で様々なパターンを形成する。また、化学反応によって生成されるパターン形成の有名な例として、リーゼガング現象が挙げられる。リーゼガング現象とは、ゲル中の電解質（内部電解質）に対してその電解質に反応して沈殿を生ずる別の電解質（外部電解質）を拡散させると、沈殿が規則的な縞模様や同心円を描くという現象である。リーゼガング現象では、そのパターンのでき方において4つの法則が知られている [1]。これらのパターンについて様々な研究が行われ、その数理的メカニズムが解析されてきたが、課題も残されている。そこで、本研究は通常的环境からアプローチするのではなく、系に摂動を与えた特殊な環境を設定し、そこから新たな数理的メカニズムを発見していくことを目的とする。

2 バクテリアのコロニーパターン

2.1 実験方法

特殊な環境として、真空状態に近い環境下で実験を行う。実験手順は [2] になった。円盤状パターンを形成する濃度で実験を行い、真空化しないもの（コントロール）と真空度合い 80 % のもの（VA80）を作成した。

2.2 実験結果

結果は図 1 のようになり、VA80 ではバクテリアコロニーの周りに密度の薄い層が形成されることが確認された（図 1(b),(d)）。

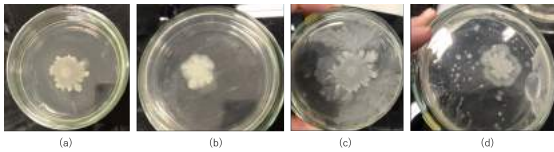


図 1: 円盤状パターン領域での実験結果。(a) コントロール (3 日後), (b) VA80 (3 日後), (c) コントロール (13 日後), (d) VA80 (13 日後)。

一方で、ミクロの違いについて確認するためバクテリアコロニーを顕微鏡で観察した（図 2）。顕微鏡で観察すると図 2(b),(c) のように密度の濃い層と密度の薄い層ではバクテリアの様子に差が見られた。図 2(d) は VA80 フロント（図 1(d) のコロニー先端）部分の詳細像で、レース模様型コロニーが確認された。レース模様型コロニーはほぼすべての細胞が基質産生タイプであり運動しない。栄養を摂取して細胞分裂をするが、基質等によって分離せず、髪の毛が伸びていくかのように増殖する状態である。

2.3 数理モデル

本研究では、三村・坂口・松下モデル [3] を扱う。時刻 t 、場所 \mathbf{r} において活性バクテリア密度を $b(\mathbf{r}, t)$ 、非活性バクテ

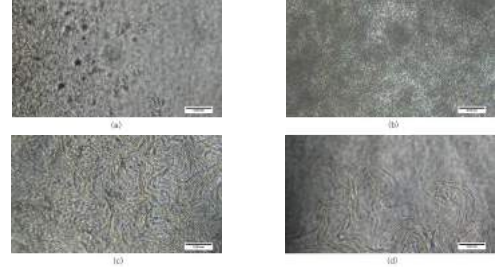


図 2: 円盤状パターン領域でのバクテリアコロニーの顕微鏡写真 (20 倍、スケールバーは 0.05mm)。(a) コントロールフロント, (b) VA80 濃い層, (c) VA80 薄い層, (d) VA80 フロント。

リア密度を $s(\mathbf{r}, t)$ 、栄養濃度を $n(\mathbf{r}, t)$ とする。3 つの未知変数 $b(\mathbf{r}, t), n(\mathbf{r}, t), s(\mathbf{r}, t)$ の時空間変化は次の反応拡散系で記述される。

$$\begin{aligned}\frac{\partial b}{\partial t} &= D\Delta b + \epsilon g(n)b - \alpha(b, n)b \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= \Delta n - g(n)b \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \alpha(b, n)b\end{aligned}$$

D はバクテリアの拡散係数と栄養物質の拡散係数の比、 $g(n)$ はバクテリアの増殖率、 ϵ はバクテリアが栄養を摂取した後どの程度増殖に変換されたかという割合を表す正定数、 $\alpha(b, n)$ は活性バクテリアから非活性バクテリアへの転換率を表す。2 次元有界領域 Ω において、初期条件を

$$(b(\mathbf{r}, 0), n(\mathbf{r}, 0), s(\mathbf{r}, 0)) = (b_0(\mathbf{r}), n_0, 0), \mathbf{r} \in \Omega$$

とする。 Ω はシャーレの形状に対応する領域であり、 $b_0(\mathbf{r})$ はバクテリアの 1 点接種に対応する点関数、 n_0 は空間一様に分布されている栄養分の初期濃度であり正定数とする。境界値条件はノイマン境界条件とする。

2.4 数値シミュレーション結果

三村・坂口・松下モデルを陽的オイラー法を用いて計算した。初期関数は $b_0(\mathbf{r}) = \beta_M e^{-\frac{x^2+y^2}{6.25}}$ (β_M : 定数は中心の最大密度を表す) を与え、パラメータは円盤状パターンができるパラメータを用いた。真空状態に近い環境にすることで D の値が下がると考えた。つまり、真空の影響で代謝の低下が起こり動き回ることができなくなると考え、 D の値を $D = (0.25 - 0.25 \times \frac{t'}{K})^2$ とした（図 3）。ここで、 t' は現在の時間、 K は最大の時間を表す。



図 3: $D = (0.25 - 0.25 \times \frac{t'}{K})^2$ の数値シミュレーション結果 ($t = 1000$)。コロニー内部の密度が大きく外部の密度が小さくなっている。

シミュレーション結果より、 D の値を下げると実験結果を再現することができた。 D が小さくなるすなわち、バクテリアが運動していないことは、顕微鏡で観察したバクテリアが図 2 (d) のような運動しないレース模様型コロニーになっていることに一致する。したがって、真空状態に近い環境ではバクテリアの運動性が失われることが推測できる。

3 リーゼガング現象

3.1 実験の設定

特殊な環境として、試験管のサイズや形状を変化させた。内部電解質として寒天溶液でゲル化したりん酸水素二ナトリウムを用い、外部電解質として塩化カルシウムを用いた。約 3 週間、25℃のインキュベーターに置き、塩化ナトリウムのリーゼガングバンドを沈殿させた。

3.2 実験結果

直径×高さが 12×120mm (サイズ 12)、18×180mm (サイズ 18) などの試験管を用い、実験を行った。試験管のサイズによって実験による 4 つ法則に大きな違いはないことがわかったが、図 4 のように試験管の底に近づくにつれてリーゼガングバンドの幅や形に違いが表れた。

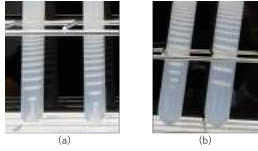


図 4: 試験管の底部分の拡大写真。(a) サイズ 12, (b) サイズ 18。

試験管の底部分の形状の影響をみるために試験管と異なり底部分が円柱状の管である比色管 (23×200mm) を用いて実験を行った。図 5(a) のように、比色管では試験管で見られたようなリーゼガングバンドの幅や形の違いは見られず、規則的なリーゼガングバンドが形成された。このことから、リーゼガングバンド形成には境界の影響があると考えられる。器具の形状の影響が考えられることから、二又試験管 (18 (直径) mm)、三角フラスコ (52 (胴径)×82mm) などの器具についても同様に実験を行うと、図 5(b),(c) のような結果となった。二又試験管では、リーゼガングバンドが 2 つに分かれているが規則的には沈殿しなかった。三角フラスコについては、沈殿ができていたが崩れた形で形成された。

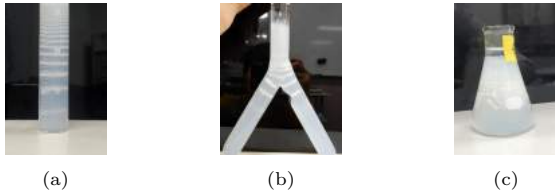


図 5: 様々な境界条件でのリーゼガング現象の実験結果。(a) 比色管の底部分の拡大写真, (b) 二又試験管 (21 日目), (c) 三角フラスコ (18 日目)。

3.3 数理モデル

簡単な沈殿メカニズム (2:1 タイプ、 A_2B) を考える。



ここで、 A は外部電解質、 B は内部電解質、 C は中間物質、 P は沈殿物を表す。反応式 (1)(2) は次の偏微分方程式で表

される [4]。

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - 2ka^2b \\ \frac{\partial b}{\partial t} &= D_b \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - ka^2b \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= D_c \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + ka^2b - \kappa_1 c \Theta(c - c^*) - \kappa_2 cp \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \kappa_1 c \Theta(c - c^*) + \kappa_2 cp \end{aligned}$$

$$t \in (t_0, T), x \in (0, X)$$

ここで、 a は A の濃度、 b は B の濃度、 c は C の濃度、 p は沈殿物の量、 D_a は a の拡散係数、 D_b は b の拡散係数、 D_c は c の拡散係数、 k は反応式 (1) の化学速度定数、 κ_1 は凝固速度定数、 κ_2 は自己触媒の沈殿形成の速度定数、 Θ はヘヴィサイドの階段関数、 c^* は凝固閾値関数を表す。初期条件は

$$\begin{aligned} a(t_0, x) &= a_0 \Theta(x_{gel} - x), b(t_0, x) = b_0 \Theta(x - x_{gel}) \\ c(t_0, x) &= 0, p(t_0, x) = 0 \end{aligned}$$

ここで、 x_{gel} は電解質の初期状態での接合点の位置を表し、 t_0 は初期時間を表す。境界値条件は A の濃度は反応中は一定に保たれ、他の部分の A, B および C については、ノイマン境界条件とする。

3.4 数値シミュレーション結果

このモデルを陽的オイラー法を用いて計算した。シミュレーション結果は図 6 のようになり、1 次元では沈殿物 P は縞模様に沈殿した。2 次元でも縞模様に沈殿ができたが、実験結果のようなつながったリーゼガングバンドはできなかった。

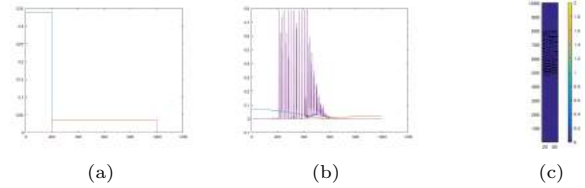


図 6: 数値シミュレーション結果 (陽的オイラー法)。(a) 1 次元 ($t=0$), (b) 1 次元 ($t=1000000$), (c) 2 次元 ($t=2000000$)。

次に、様々な境界条件におけるリーゼガング現象の数値シミュレーションを有限要素法を用いて行う。上記のモデルでは有限要素法を用いるのが難しいため、チューリングモデルで数値シミュレーションを行った。結果は図 7 のようになり、数値シミュレーションからもリーゼガングバンド形成には境界の影響があることがわかった。

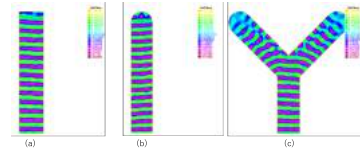


図 7: 数値シミュレーション結果 (有限要素法)。(a) 比色管, (b) 試験管, (c) 二又試験管。

参考文献

- [1] S. Kai, (1993), "Pattern Formation in Precipitation", FORMATION DYNAMICS AND STATISTICS OF PATTERNS(2), World Scientific, 54, 206-265.
- [2] M. Matsushita, F. Hiramatsu, N. Kobayashi, T. Ozawa, Y. Yamazaki and T. Matsuyama, (2004), Colony formation in bacteria experiments and modeling, Biofilms, 1, 305-317.
- [3] M. Mimura, H. Sakaguchi and M. Matsushita, (2000), Reaction-diffusion modelling of bacterial colony patterns, Physica A, 282.
- [4] Ferenc Moinar Jr, Ferenc Izsak and Istvan Lagzi, (2008), Design of equidistant and revert type precipitation patterns in reaction-diffusion systems, Phys. Chem. Chem. Phys., 10, 2368-2373.